

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ГИРОСТАТА КОВАЛЕВСКОЙ В ДВОЙНОМ ПОЛЕ¹

И.И. Харламова, Г.Е. Смирнов

Волгоградская академия государственной службы

Россия, 400131, Волгоград, ул. Гагарина, 8

E-mail: irinah@vags.ru

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Москва, Воробьевы горы

E-mail: glebevgen@yandex.ru

Получено 13 августа 2010 г.

Изучаются особые периодические движения (критические точки ранга 1 интегрального отображения), найденные в работе М.П. Харламова (Механика твердого тела, вып. 37, 2007) в интегрируемой задаче о движении гиростата в двойном поле при условиях Ковалевской на моменты инерции. Исследованы возможные перестройки внутри множества этих решений в зависимости от существенных параметров – одного интегрального и двух физических. Получены аналитические уравнения разделяющего множества и его особенностей, указано количество возникающих областей с различным набором решений. Найден образ разделяющего множества в пространстве параметров, задающих бифуркационные диаграммы на изоэнергетических уровнях. Вычисления, связанные с преобразованиями многочленов высоких степеней, выполнены в компьютерной системе Mathematica 7.

1 Введение

В невырожденной интегрируемой гамильтоновой системе критические точки ранга 1 (так называемые особые периодические движения) организованы в подсистемы с одной степенью свободы. Поэтому в принципе соответствующие траектории образуют однопараметрические семейства (при фиксированных физических параметрах задачи). Сам факт построения периодических решений всегда имеет в динамике особое значение. Но важность исследования таких семейств, кроме этого, состоит также и в том, что в системах с тремя степенями свободы их бифуркации порождают перестройки типов плоских сечений бифуркационных диаграмм задачи в целом. В случае Ковалевской–Реймана–Семенова–Тян-Шанского [1] при отсутствии гиростатического момента λ (волчок в двойном поле) явное представление зависимости особых периодических движений (ОПД) от одного интегрального параметра позволили получить [2] полную классификацию бифуркационных диаграмм Σ_h интегрального отображения на изоэнергетических поверхностях $H = h$, т.е. построить разделяющее множество на плоскости (h, γ) , где γ – единственный существенный физический параметр задачи (отношение напряженностей силовых полей). При $\lambda \neq 0$ (гиростат в двойном поле) все критические точки ранга 1 также найдены [3] и уравнения соответствующих ОПД интегрируются в эллиптических функциях. Однако эти решения удалось выписать

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ и Администрации Волгоградской области № 10-01-97001.

лишь в зависимости от двух нефизических параметров, связанных уравнением высокой степени. Через эти же параметры выражены и постоянные общих интегралов. Это удобно для численного построения плоских диаграмм Σ_h , так как при заданном h эффективно вычисляются все граничные точки одномерных сегментов. Попытки явно описать соответствующие разделяющие поверхности в пространстве (h, γ, λ) , названные атласом бифуркационных диаграмм [4], еще не привели к окончательному результату. В настоящей работе выполнено исследование условий существования и бифуркаций ОПД, выписаны явные уравнения соответствующих разделяющих поверхностей. Отметим, что многие вычисления выполнены в компьютерной системе Mathematica 7 (Academic License # L3298-7174) ввиду крайне высоких вычислительных сложностей. При этом во всех случаях удалось провести исследование полностью, доказать все утверждения о количестве и характере решений тех или иных уравнений. Несмотря на использование компьютерных технологий, все рассуждения, представленные ниже, являются доказательствами, поскольку описаны все этапы вычислений, предъявлены промежуточные результаты, и любое вычисление при необходимости может быть легко повторено. Ряд результатов вывести «вручную» уже нельзя. В то же время, в большинстве случаев получить ответ напрямую не помогает и компьютер – необходимо увидеть и задать в компьютерной системе нужную подстановку. Поэтому, несмотря на фантастические возможности систем аналитических вычислений, роль исследователя по-прежнему остается решающей.

2 Исходные уравнения

Пусть α, β – характеристические векторы взаимно ортогональных силовых полей с модулями $|\alpha| = a$, $|\beta| = b$ и

$$a > b > 0. \quad (1)$$

Пусть ω – угловая скорость тела, λ – единственная отличная от нуля, осевая компонента вектора гиросtatического момента. Выражения фазовых переменных через вспомогательную переменную $w = \omega_1^2 + \omega_2^2 \geq 0$ описываются уравнениями (30) работы [3]. В этих выражениях фигурируют физические параметры λ, p, r ($p = \sqrt{a^2 + b^2} > r = \sqrt{a^2 - b^2} > 0$), а также два параметра σ, u , первый из которых есть неопределенный множитель Лагранжа в линейной зависимости дифференциалов общих интегралов, и потому сам является частным интегралом на рассматриваемых траекториях, а второй – вспомогательный параметр, введенный в процессе вычислений с целью получения простых формул и связанный с σ уравнением

$$L = \lambda^2(\lambda^2 + \sigma)^2 u^5 + (\lambda^2 + \sigma)[2p^2 \lambda^4 - (\lambda^2 + \sigma)^3 \sigma] \sigma u^4 + r^4 \lambda^6 \sigma^2 u^3 + 2r^4 \lambda^4 \sigma^4 (\lambda^2 + \sigma)^2 u^2 - r^8 \lambda^8 \sigma^6 = 0. \quad (2)$$

Зависимость w от времени описывается уравнением

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = -\frac{\lambda^2}{4\sigma^2} P_4(w), \quad (3)$$

где $P_4(w) = P_+(w)P_-(w)$ и

$$P_{\pm}(w) = w^2 + 2\sigma^2 \frac{u \pm r^2 \lambda^2}{\lambda^2 u} w + \frac{\sigma[u^3 - (\lambda^2 + \sigma)\sigma^2 u^2 + r^4 \lambda^4 \sigma^3]}{(\lambda^2 + \sigma)\lambda^2 u^2}.$$

В частности, условия вещественности решений имеют вид системы неравенств

$$P_4(w) \leq 0, \quad w \geq 0, \quad (4)$$

исследование совместности которых будем проводить в плоскости (σ, λ) с учетом зависимости от a, b . Хотя существенным является лишь отношение $\gamma = b/a \in (0, 1)$, сохраним в

общих уравнениях оба параметра для возможности в будущем использовать любые предельные переходы. Отметим, что во всех приведенных формулах встречаются лишь четные степени λ , поэтому достаточно рассмотреть полуплоскость $\lambda \geq 0$. Ниже все утверждения формулируются для этой полуплоскости, что особо уже не оговаривается. При фиксированных σ, λ имеется до пяти значений u , удовлетворяющих (2). Некоторым из них соответствуют решения уравнения (3) при условиях (4), причем таких решений может быть и несколько, если множество (4) несвязно. Пусть $\mathcal{P}(\sigma, \lambda, u)$ – набор решений (3) как совокупность геометрических объектов на плоскости (w, \dot{w}) и пусть $\mathcal{P}(\sigma, \lambda) = \cup_u \mathcal{P}(\sigma, \lambda, u)$. Применительно к задаче количественной классификации ОПД назовем *разделяющим множеством* подмножество \mathcal{S} в плоскости (σ, λ) , при переходе через которое меняется набор $\mathcal{P}(\sigma, \lambda)$. Сразу же отметим часть \mathcal{S}_0 разделяющего множества \mathcal{S} , состоящую из координатных осей и особой параболы $\Pi : \lambda^2 + \sigma = 0$. На этом множестве выражения для явных решений, выписанные в [3], имеют особенности. Как показано в [5], особенность на параболе устранима предельным переходом, однако перестройки в множестве $\mathcal{P}(\sigma, \lambda)$ при этом не исключены.

3 Первое разделяющее множество

Периодические решения претерпевают бифуркации при переходе через неподвижные точки, которые соответствуют кратному корню многочлена P_4 . Дискриминанты многочленов P_{\pm} имеют вид

$$\frac{\sigma}{\lambda^4(\lambda^2 + \sigma)u^2} D_{\pm}, \quad D_{\pm} = [r^2 \lambda^2 \sigma \pm (\lambda^2 + \sigma)u]^2 \sigma^2 - \lambda^2 u^3.$$

Замечание 1 (1). *Здесь и далее в результатах и дискриминантах нас интересует лишь их зависимость от параметров (возможность обращения в нуль) и, в отдельных случаях, их знак. Поэтому, для простоты записи, пишем выражения, имея в виду равенство с точностью до положительного числового множителя.*

В соответствии с этой договоренностью, результаты многочленов D_{\pm} с многочленом L по переменной u равны $r^{16}(p^2 \pm r^2)^3 \lambda^{30} \sigma^{19} (\lambda^2 + \sigma)^3$. Эти значения не обращаются в нуль за пределами \mathcal{S}_0 . Следовательно, кратный корень P_4 может быть лишь общим корнем P_+ и P_- . Тогда, как и должно быть в неподвижной точке, этот корень нулевой. Поэтому

$$P_0(u) = u^3 - (\lambda^2 + \sigma)\sigma^2 u^2 + r^4 \lambda^4 \sigma^3 = 0. \quad (5)$$

Приравниваем к нулю результат многочленов L и P_0 по u , получим

$$r^{16} \lambda^{24} \sigma^{15} (\lambda^2 + \sigma)^3 \{ r^8 + r^4 [6p^2 \lambda^4 + \lambda^8 - 4\lambda^2 (p^2 + \lambda^4) \sigma - 2(2p^2 + \lambda^4) \sigma^2 + 4\lambda^2 \sigma^3 + 2\sigma^4] - [\sigma(\lambda^2 + \sigma) - 2p^2]^2 [2p^2 \lambda^4 - \sigma^2 (\lambda^2 + \sigma)^2] \} = 0.$$

Вне \mathcal{S}_0 достаточно найти нули выражения в фигурной скобке, которое разлагается на множители в виде $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$. Поэтому первое разделяющее множество (ПРМ) в составе \mathcal{S} – четыре кривые

$$\begin{aligned} Q_1 &= (a - b)^2 + (a + b)\lambda^2 - (\lambda^2 + \sigma)\sigma = 0, \\ Q_2 &= (a + b)^2 + (a - b)\lambda^2 - (\lambda^2 + \sigma)\sigma = 0, \\ Q_3 &= (a + b)^2 - (a - b)\lambda^2 - (\lambda^2 + \sigma)\sigma = 0, \\ Q_4 &= (a - b)^2 - (a + b)\lambda^2 - (\lambda^2 + \sigma)\sigma = 0. \end{aligned}$$

Сами эти кривые будем обозначать так же, как и левые части уравнений – через $Q_1 - Q_4$, а их объединение – через \mathcal{S}_1 . Значения энергии в неподвижных точках тела в двойном поле

хорошо известны (см., например, [6]). В работе [3] выполнен сдвиг энергии на константу. Примем здесь стандартное выражение интеграла энергии

$$H = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{1}{2}\omega_3^2 - (\alpha_1 + \beta_2),$$

тогда его критические значения таковы

$$h = \pm a \pm b. \quad (6)$$

Покажем, как получить их в точках ПРМ. Исключая старшие степени u в многочленах P_0 и L , на кривых Q_i найдем

$$u_{1,2} = (a \pm b)\lambda^2\sigma, \quad u_{3,4} = (-a \pm b)\lambda^2\sigma. \quad (7)$$

Подставим в функцию H значения фазовых переменных, полученные из выражений (8), (30) работы [3]:

$$h = -\frac{u^3\lambda^2 - r^4\lambda^4\sigma^3(\lambda^2 + 2\sigma) + u^2\sigma^2(\lambda^2 + \sigma)(\lambda^2 + 2\sigma)}{2u^2\lambda^2\sigma(\lambda^2 + \sigma)}. \quad (8)$$

Исключим отсюда u^3 с помощью условия (5), и подставим u_i из (7). Получим критические значения (6), занумерованные в порядке возрастания.

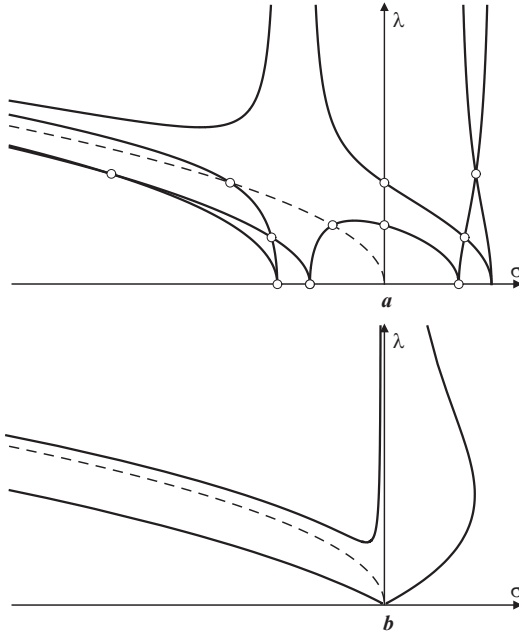


Рис. 1: Первое и второе разделяющие множества.

Геометрия ПРМ определяется следующим непосредственно проверяемым утверждением.

Предложение 1. *Первое разделяющее множество имеет ровно четыре кратные точки при $\lambda > 0$*

$$Q_1 \cap Q_2 = \{q_+^{(12)}, q_-^{(12)}\}, \quad Q_1 \cap Q_3 = \{q_+^{(13)}, q_-^{(13)}\},$$

где

$$q_{\pm}^{(12)} = (-a \pm \sqrt{4a^2 + b^2}, \sqrt{2a}), \quad q_{\pm}^{(13)} = (-b \pm \sqrt{a^2 + 4b^2}, \sqrt{2b}), \quad (9)$$

четыре точки пересечения с осью $\lambda = 0$ (каждая принадлежит двум кривым)

$$Q_1 \cap Q_4 \cap \{\lambda = 0\} = \{(-a + b, 0), (a - b, 0)\},$$

$$Q_2 \cap Q_3 \cap \{\lambda = 0\} = \{(-a - b, 0), (a + b, 0)\},$$

две точки пересечения с осью $\sigma = 0$

$$Q_3 \cap \{\sigma = 0\} = \left(0, \frac{a+b}{\sqrt{a-b}}\right), \quad Q_4 \cap \{\sigma = 0\} = \left(0, \frac{a-b}{\sqrt{a+b}}\right)$$

и две точки пересечения с особой параболой

$$Q_3 \cap \Pi = \left(-\frac{(a+b)^2}{a-b}, \frac{a+b}{\sqrt{a-b}}\right), \quad Q_4 \cap \Pi = \left(-\frac{(a-b)^2}{a+b}, \frac{a-b}{\sqrt{a+b}}\right).$$

Из найденных выражений для координат кратных точек следует, что пересечения трех кривых Q_i в одной точке невозможны. Таким образом, множество S_1 вместе с отмеченным ранее особым множеством S_0 разбивает верхнюю полуплоскость на 19 областей (рис. 1, а, штриховой линией показана особая парабола).

4 Второе разделяющее множество

Количество решений в зависимости от параметров может изменяться при переходе через такие значения, при которых уравнение (2) имеет кратный корень по u . Назовем это множество параметров вторым разделяющим множеством (ВРМ) и обозначим через S_2 . Из условия $L'_u = 0$, учитывая, что в (2) $u \neq 0$, получим

$$5u^3\lambda^2(\lambda^2 + \sigma)^2 - 4u^2\sigma(\lambda^2 + \sigma)[\sigma(\lambda^2 + \sigma)^3 - 2p^2\lambda^4] + 3r^4u\lambda^6\sigma^2 + 4r^4\lambda^4\sigma^4(\lambda^2 + \sigma)^2 = 0. \quad (10)$$

Условие совместности по u уравнений (2), (10) за пределами S_0 приводит к уравнению

$$R_L = 27r^8\lambda^{16} - 256\sigma(\lambda^2 + \sigma)^3[\sigma(\lambda^2 + \sigma)^3 - 2p^2\lambda^4]^3 + 864r^4\lambda^8\sigma(\lambda^2 + \sigma)^3[5\sigma(\lambda^2 + \sigma)^3 - 2p^2\lambda^4] = 0. \quad (11)$$

Для его упрощения заметим, что в выражении R_L параметры λ, σ входят в виде определенной комбинации. Обозначим

$$V = \frac{4(\lambda^2 + \sigma)^3\sigma}{\lambda^4}, \quad (12)$$

тогда уравнение (11) перепишется в виде

$$R_L^* = V^4 - 24p^2V^3 + 6(32p^4 - 45r^4)V^2 - 16p^2(32p^4 - 27r^4)V - 27r^8 = 0. \quad (13)$$

Предложение 2. В области параметров (1) уравнение (13) имеет ровно два вещественных корня V_1, V_2 противоположных знаков

$$V_1 = (\varkappa_1 + \varkappa_2)^3 > 0, \quad V_2 = (\varkappa_1 - \varkappa_2)^3 < 0. \quad (14)$$

Здесь $\varkappa_1 = \sqrt{r^{4/3} + (p^4 - r^4)^{1/3}}$, $\varkappa_2 = \sqrt{2r^{4/3} - (p^4 - r^4)^{1/3} + 2p^2\varkappa_1^{-1}}$.

Доказательство. Непосредственное вычисление корней обозримых выражений не дает. Выполним подстановку $V = W^3$, $r = q^3$, получим разложение $R_L^* = P_1 P_2$, где

$$\begin{aligned} P_1 &= 3q^8 + 8p^2 W + 6q^4 W^2 - W^4, \\ P_2 &= 9q^{16} - 24p^2 q^8 W + 64p^4 W^2 - 18q^{12} W^2 - 48p^2 q^4 W^3 + 39q^8 W^4 - \\ &\quad - 16p^2 W^5 + 6q^4 W^6 + W^8. \end{aligned}$$

Дискриминант P_2 равен $r^{40/3}(512p^4 - 169r^4)^2(p^4 - r^4)^4$ (см. замечание 1), поэтому в области (1) многочлен P_2 кратных корней не имеет, а численная проверка дает все комплексные корни. Вычисление корней P_1 приводит к выражениям

$$\varepsilon_1 \sqrt{r^{4/3} + (p^4 - r^4)^{1/3}} + \varepsilon_2 \sqrt{2r^{4/3} - (p^4 - r^4)^{1/3} + \varepsilon_1 \frac{2p^2}{\sqrt{r^{4/3} + (p^4 - r^4)^{1/3}}}},$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$. Заметим, что

$$\left[\frac{2p^2}{\sqrt{r^{4/3} + (p^4 - r^4)^{1/3}}} \right]^2 - \left[2r^{4/3} - (p^4 - r^4)^{1/3} \right]^2 = 3(p^4 - r^4)^{2/3} > 0,$$

поэтому вещественные корни отвечают только значению $\varepsilon_1 = 1$. Произведение всех корней отрицательно, поэтому пара вещественных корней имеет разные знаки, но, очевидно, что корень с $\varepsilon_2 = 1$ положительный. Утверждение доказано. \square

Теперь кривые в составе ВРМ легко строятся численно (рис. 1, *b*). Удобно ввести параметризацию, положив $\sigma = s\lambda^2$. Тогда из (12) получим следующие три ветви ВРМ:

$$\begin{aligned} D_A : \lambda &= \sqrt[4]{\frac{V_1}{4s(1+s)^3}}, \quad \sigma = \frac{s}{2} \sqrt{\frac{V_1}{s(1+s)^3}}, \quad s \in (-\infty, -1); \\ D_B : \lambda &= \sqrt[4]{\frac{V_1}{4s(1+s)^3}}, \quad \sigma = \frac{s}{2} \sqrt{\frac{V_1}{s(1+s)^3}}, \quad s \in (0, +\infty); \\ D_C : \lambda &= \sqrt[4]{\frac{V_2}{4s(1+s)^3}}, \quad \sigma = \frac{s}{2} \sqrt{\frac{V_2}{s(1+s)^3}}, \quad s \in (-1, 0). \end{aligned} \quad (15)$$

Как видно из рис. 1, *b* кривые в составе \mathcal{S}_2 вместе с множеством \mathcal{S}_0 делят верхнюю полуплоскость на шесть областей. В каждой из них сохраняется количество корней многочлена $L(u)$. Заметим, что $L(0) = -r^8 \lambda^8 \sigma^6$ обращается в нуль только на осях координат. Поэтому в каждой из областей не могут изменяться и знаки корней. Теперь всю необходимую информацию о корнях $L(u)$ легко получить численно.

Для нахождения значения энергии, отвечающего этим разделяющим случаям, необходимо выразить общий корень u уравнений (2), (10). Для этого в дополнение к (12) выполним подстановку $u = \sigma \sqrt[3]{\lambda^2 \sigma Z}$. Система уравнений примет вид

$$\begin{aligned} (2V)^{1/3} Z^4 [8p^2 - V + 2(2V)^{1/3} Z] + 4r^4 [(2V)^{2/3} + 2Z] Z^2 - 8r^8 &= 0, \\ (2V)^{1/3} Z^2 [16p^2 - 2V + 5(2V)^{1/3} Z] + 4r^4 [(2V)^{2/3} + 3Z] &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Условие ее совместности по Z , естественно, дает уравнение (13) с решениями (14). Приравняв к нулю результат левых частей (16) по переменной $V^{1/3}$, получим

$$r^4(p^4 - r^4)Z^{14}(Z^3 - 4r^4)^4 = 0,$$

а поскольку из первого уравнения (16) следует, что $Z \neq 0$, то $Z = r\sqrt[3]{4r}$, и, следовательно, кратный корень $L(u)$ равен $u = r\sigma\sqrt[3]{4r\lambda^2\sigma}$. Подставляя это значение вместе с (15) в (8), найдем

$$h = -\frac{s(2s+1)V^{2/3} + (2s^2 + s - 1)r^{4/3}}{4\sqrt{s(1+s)^3}V^{1/6}}. \quad (17)$$

Здесь $V = V_{1,2}$ согласно (14), а промежуток изменения параметра s определяется в соответствии с уравнениями (15). Из (15) возьмем формулы и для $\lambda(s)$. Получим, после перехода к безразмерным переменным $b/a, h/a, \lambda/\sqrt{a}$, параметрические уравнения разделяющей поверхности для классификации бифуркационных диаграмм на изоэнергетических уровнях, разрешающие неявные уравнения работы [4]. Более того, промежутки изменения s определяют условия, при которых действительно реализуются перестройки таких диаграмм. В силу ограниченности объема публикации, мы не приводим иллюстраций, которые теперь легко могут быть построены.

5 Пересечения разделяющих множеств

Для того чтобы получить общую картину на плоскости (σ, λ) , найдем пересечения \mathcal{S}_2 с кривыми Q_i , составляющими \mathcal{S}_1 .

Остановимся более подробно на пересечении $\mathcal{S}_2 \cap Q_1$. Из уравнения Q_1 выразим

$$\lambda^2 = \frac{\sigma^2 - (a-b)^2}{a+b-\sigma} \quad (18)$$

и подставим в уравнение (11). Получим $M_1^2(\sigma)N_1(\sigma) = 0$, где

$$\begin{aligned} M_1 &= (a-b)^4(a+b) - 4(a^2-b^2)^2\sigma + 6(a-b)^2(a+b)\sigma^2 - \\ &\quad - 4(a-b)^2\sigma^3 + (a+b)\sigma^4, \\ N_1 &= (a-b)^{10} \sum_{i=0}^{12} (a-b)^{-i} A_i \sigma^i \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} A_0 &= 27(a-b)^2(a+b)^6, \\ A_1 &= -4(a+b)(53a^6 - 270a^5b + 1131a^4b^2 - 1188a^3b^3 + 1131a^2b^4 - \\ &\quad - 270ab^5 + 53b^6), \\ A_2 &= 2(a+b)^2(331a^6 - 3342a^5b + 9525a^4b^2 - 12516a^3b^3 + 9525a^2b^4 - \\ &\quad - 3342ab^5 + 331b^6), \\ A_3 &= -12(a^2-b^2)(75a^6 - 286a^5b - 1547a^4b^2 + 2236a^3b^3 - \\ &\quad - 1547a^2b^4 - 286ab^5 + 75b^6), \\ A_4 &= -(75a^8 - 14492a^7b + 39404a^6b^2 + 12444a^5b^3 - 50286a^4b^4 + \\ &\quad + 12444a^3b^5 + 39404a^2b^6 - 14492ab^7 + 75b^8), \\ A_5 &= 8(a^2-b^2)(267a^6 - 2986a^5b - 1627a^4b^2 + 6068a^3b^3 - 1627a^2b^4 - \\ &\quad - 2986ab^5 + 267b^6), \\ A_6 &= -12(273a^8 - 5492a^6b^2 + 6342a^4b^4 - 5492a^2b^6 + 273b^8), \\ A_{12-i}(a,b) &= A_i(a,-b) \quad (i = 0, \dots, 5). \end{aligned}$$

Корни M_1 отвечают за точки касания кривых \mathcal{S}_2 и Q_1 , а корни N_1 отвечают за точки трансверсального пересечения кривых \mathcal{S}_2 и Q_1 . Из этих корней необходимо взять лишь те,

которые обеспечивают вещественный корень уравнения (18) относительно λ , т.е. удовлетворяющие неравенству

$$P_1(\sigma) = [\sigma^2 - (a - b)^2](a + b - \sigma) \geq 0. \quad (19)$$

Количество и взаимное расположение таких корней может измениться лишь в следующих случаях: один из многочленов M_1, N_1 имеет общий корень с P_1 , либо один из этих многочленов имеет кратный корень в области (19). Вычисляем результаты

$$\begin{aligned} \text{Res}(M_1, P_1, \sigma) &= -a^4 b^4 (a - b)^6 (a + b); \\ \text{Res}(N_1, P_1, \sigma) &= -a^{16} b^{16} (a - b)^{20} (a + b)^2; \\ \text{Res}(M_1, M'_1, \sigma) &= -a^4 b^4 (a - b)^8 (a + b)^3; \\ \text{Res}(N_1, N'_1, \sigma) &= a^{66} b^{66} (a - b)^{106} (a + b)^{16} (343a^4 + 1362a^2 b^2 + 343b^4)^4. \end{aligned}$$

Самым удивительным является, конечно, последний. В нем отброшенный здесь числовой множитель содержит 76 цифр и равен $2^{212} \times 3^{24}$, однако, вычисляется точно. Ни одно из полученных выражений в нуль не обращается, поэтому качественная структура множества $\mathcal{S}_2 \cap Q_1$ не зависит от параметров a, b в выбранной области их изменения. Следовательно, численное решение полностью определяет и качественную картину. Находим, что M_1 имеет единственный корень в области (19) и он дает точку касания Q_1 с кривой D_B . Многочлен N_1 также имеет единственный корень в указанной области. Он порождает точку трансверсального пересечения Q_1 с кривой D_A (рис. 2, а).

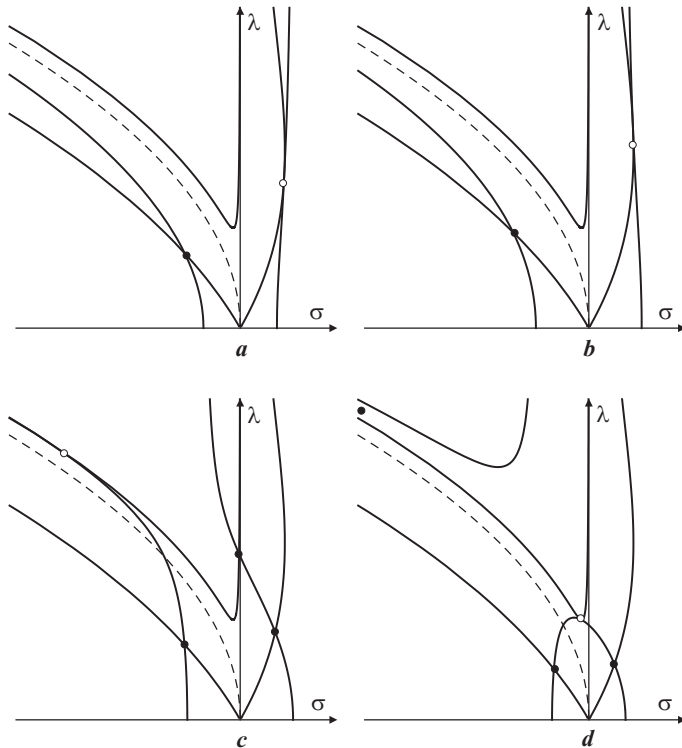


Рис. 2: Пересечения $\mathcal{S}_2 \cap Q_i$.

Рассмотрим пересечение $S_2 \cap Q_2$. Отметим, что все уравнения получаются из уравнений для Q_1 заменой $b \rightarrow -b$, поэтому верны выводы об отсутствии каких-либо общих или кратных корней у соответствующих многочленов P_2, M_2, N_2 , т.е. качественная картина от параметров снова не зависит. Находим, что кривая Q_2 имеет ровно одну точку пересечения с S_2 на ветви D_A и ровно одну точку касания с ветвью D_B (рис. 2, b).

Замечая, что случай с кривой Q_3 получается из предыдущего заменой $\lambda^2 \rightarrow -\lambda^2, \sigma \rightarrow -\sigma$, с помощью аналогичных выкладок и рассуждений находим, что кривая Q_3 имеет ровно по одной точке пересечения с каждой из ветвей D_A, D_B, D_C и одну точку касания с ветвью D_C (рис. 2, c).

Для пересечения $S_2 \cap Q_4$ все уравнения получаются из уравнений для Q_3 заменой $b \rightarrow -b$. Находим, что кривая Q_4 имеет ровно по одной точке пересечения с каждой из ветвей D_A, D_B, D_C и одну точку касания с ветвью D_C . Точка $Q_4 \cap D_C$ имеет отрицательную координату σ по модулю на порядки больше остальных (например, для $a = 1, b = 0.5$ эта точка имеет координаты $\sigma \approx -1104.12; \lambda \approx 33.25$), поэтому на рис. 2, d она показана условно.

6 Перестройки разделяющего множества

Для почти всех значений физических параметров a, b структура разделяющего множества S полностью определена. Перестройки этой структуры по указанным параметрам могут отвечать лишь случаям наличия в составе разделяющего множества точек кратности три и выше. Как отмечено ранее, пересечения трех Q_i всегда пусты, поэтому точек кратности четыре не существует, а точки кратности три возможны лишь для таких значений параметров a, b , при которых для некоторой пары индексов $i \neq j$

$$S_2 \cap Q_i \cap Q_j \neq \emptyset. \quad (20)$$

Заметим, что это же условие является необходимым и достаточным для того, чтобы при переходе параметров a, b через заданные значения могло измениться и взаимное расположение точек двух различных множеств $S_2 \cap Q_i$.

Согласно предложению 1 имеется всего четыре точки, принадлежащие при $\lambda > 0$ паре множеств Q_i , а именно, точки (9). Для исследования случая (20) необходимо проверить возможность $q_{\pm}^{(ij)} \in S_2$, что означает равенство $R_L(q_{\pm}^{(ij)}) = 0$. Имеем

$$R_L(q_{\pm}^{(13)}) = 1024 a^{20} (A_1 \pm A_2) X, \quad X = (b/a)^2 > 0,$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 + 32X + 118X^2 - 1756X^3 - 10511X^4 + 8388X^5 + \\ &\quad + 143104X^6 + 221840X^7 - 768X^8; \\ A_2 &= 8(1 + 3X)\sqrt{1 + 4X}(1 + 10X - 60X^2 - 370X^3 + 891X^4 + \\ &\quad + 4632X^5 + 16X^6). \end{aligned}$$

Обозначая $\gamma = b/a \in [0, 1]$, вычислим

$$\begin{aligned} A_1^2 - A_2^2 &= -(1 + 4\gamma + 9\gamma^2 + 18\gamma^3 + 20\gamma^4 + 12\gamma^5)^2 \times \\ &\quad \times (-1 + 4\gamma - 9\gamma^2 + 18\gamma^3 - 20\gamma^4 + 12\gamma^5)^2 \times \\ &\quad \times (-1 + 4\gamma^2 + 602\gamma^4 + 7140\gamma^6 + 24863\gamma^8 + 32928\gamma^{10}). \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнение $A_1^2 - A_2^2 = 0$ уже не содержит параметров и имеет ровно два положительных корня

$$\begin{aligned} b/a &= \gamma_* \approx 0.17865486876 \quad (\text{точка } q_-^{(13)}, \sigma < 0), \\ b/a &= \gamma^* \approx 0.44041017065 \quad (\text{точка } q_+^{(13)}, \sigma > 0). \end{aligned} \quad (22)$$

При этом первый из них является корнем многочлена в последней скобке (21), т.е. простым корнем, и поэтому в соответствующем случае все три кривые пересекаются трансверсально, а второй является корнем многочлена во второй скобке (21), входящей в это уравнение в квадрате, и поэтому, являясь кратным корнем, связан с точками касания. Разделяющее множество для значений (22) показано на рис. 3. Видно, что первое значение (рис. 3, *a*) отвечает случаю, когда кривые Q_1 и Q_3 пересекаются на ветви D_A , второе (рис. 3, *b*) – случаю, когда точка касания кривых D_C и Q_1 находится на кривой Q_3 , что и объясняет кратность данного значения b/a в уравнении (21).

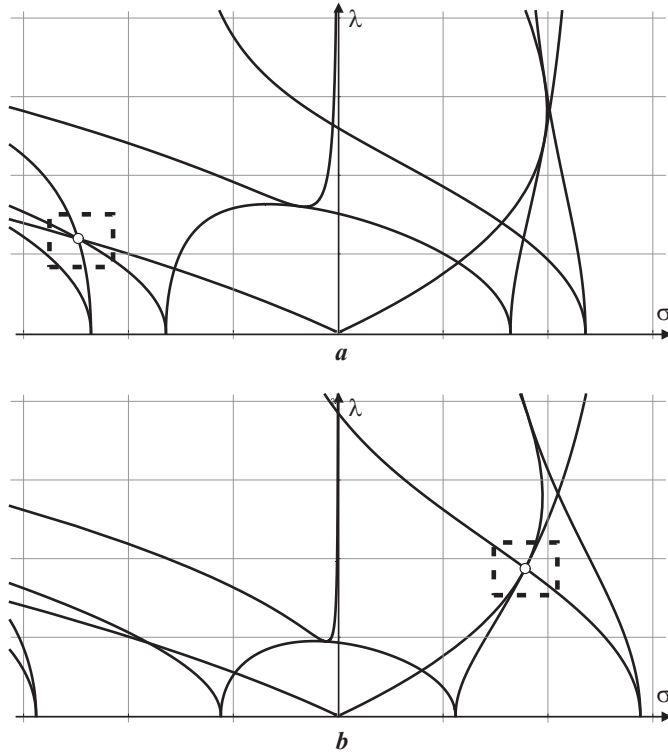


Рис. 3: Перестройки областей в окрестности $b/a = \gamma_*, \gamma^*$.

Заметим теперь, что точки $q_{\pm}^{(12)}$ получаются из $q_{\pm}^{(13)}$ перестановкой значений a и b , а функция R_L от такой перестановки не изменяется. Поэтому, проводя аналогичные вычисления для точек $q_{\pm}^{(12)}$, придем к уравнению вида (21), в котором уже $Y = a/b$. Для этого отношения найденные выше корни являются посторонними, так как $a/b > 1$. Таким образом, этот случай не реализуется при допустимых значениях параметров.

Итак, построенное множество \mathcal{S} разбивает верхнюю полуплоскость параметров (σ, λ) на 35 открытых областей, которые несложно закодировать в соответствии с номерами пары областей, порожденных первым и вторым разделяющими множествами. При переходе через значения (22) одна из таких областей исчезает, взамен появляется область уже с другим кодом и, соответственно, с другим количеством порожденных периодических траекторий. Поскольку внутри каждой из образовавшихся областей количество траекторий

измениться уже не может, то численный анализ дает полную картину. В четырех областях движений нет, в остальных количество траекторий варьируется от одной до пяти. Исследование разделяющего множества, определяющего условия существования и количества периодических траекторий закончено.

7 Заключение

В работе представлено полное аналитическое исследование разделяющих множеств в пространстве параметров задачи о движении гиростата Ковалевской в двойном поле, связанных с наличием и бифуркациями внутри совокупности критических точек ранга 1 интегрального отображения. Образ этого множества в трехмерном пространстве существенных параметров изоэнергетических многообразий определяет атлас бифуркационных диаграмм. Получены явные уравнения (6) и (17) для поверхностей в составе такого атласа, фактически решающие неявные уравнения высокой степени, полученные в работе [4] и, что еще более важно, исключающие посторонние решения этих уравнений. В результате получена аналитическая основа для полной классификации и визуализации бифуркационных диаграмм гиростата Ковалевской в двойном поле.

Список литературы

- [1] Рейман А.Г., Семенов-Тянь-Шанский М.А. Лаксово представление со спектральным параметром для волчка Ковалевской и его обобщений // Функц. анализ и его приложения. – 1988. – **22**, 2. – С. 87-88.
- [2] Харламов М.П. Области существования критических движений обобщенного волчка Ковалевской и бифуркационные диаграммы // Механика твердого тела. – 2006. – № 36. – С. 13-22.
- [3] Харламов М.П. Особые периодические движения гиростата Ковалевской в двойном поле // Механика твердого тела. – 2007. – № 37. – С. 85-96.
- [4] Рябов П.Е. Алгебраические кривые и бифуркационные диаграммы двух интегрируемых задач // Механика твердого тела. – 2007. – № 37. – С. 97-111.
- [5] Kharlamov M.P. Bifurcation diagrams and critical subsystems of the Kowalevski gyrostat in two constant fields // Hiroshima Math. J. – 2009. – **39**, 3. – P. 327-350.
- [6] Харламов М.П. Критическое множество и бифуркационная диаграмма задачи о движении волчка Ковалевской в двойном поле // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 47-58.